Corrigés des exercices 2.1 à 2.26 : | حلول التمارين من 1.2 إلى 26.2

Exercice 2.1 :

1/ A l'état d'équilibre, les charges se répartissent sur la surface du conducteur c'est-à-dire sur la surface de la sphère. A l'intérieur du conducteur la charge totale est nulle.

2/ Déduction de l'expression de la densité surfacique de la charge :

$$\left.\begin{array}{l}\sigma = \dfrac{Q}{S} \\ S = 4\pi R^2\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}} \left(C/m^2\right)$$

3/ Dans un conducteur en équilibre, le champ électrostatique est nul.

4/ D'après le théorème de Coulomb on a :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}} \left(V/m\right)$$

5/ Pour appliquer le théorème de Gauss, considérons une surface sphérique fermée de rayon . Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est : $\Phi = ES = E.4\pi r^2$. Donc, l'intensité du champ électrostatique produit à la distance $r\left(r \geq R\right)$ du centre du conducteur est :

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}} \left(V/m\right)$$

Exercice 2.2 :

1/ On applique le théorème de Gauss : La charge intérieure est égale à la somme des charges à l'intérieur de la surface de Gauss qui est une sphère de rayon R_G un peu plus grand que le rayon de la sphère conductrice :

$$Q_{\text{int}} = 80 - 20 \Rightarrow Q_{\text{int}} = 60.10^{-6} C$$

$$\boxed{E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0 S_G} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_G^2.\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{E = 84,3.10^6 Vm^{-1}}$$

2/ La surface de Gauss, dans ce cas, entoure uniquement la cavité. La charge intérieure est celle que porte la cavité, soit $-20\mu C$. D'où le champ près de la surface de la cavité :

$$\boxed{E' = \frac{Q'_{\text{int}}}{\varepsilon_0 S'_G} = \frac{Q'_{\text{int}}}{4\pi r_G^2.\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{E' = 2,81.10^6 Vm^{-1}}$$

3/ La charge sur la surface interne de la cavité est égale à la charge ponctuelle mais de signe opposé, et ce en raison de l'influence totale que produit la charge ponctuelle :

$$q + Q_i = 0 \Rightarrow \boxed{Q_i = 20\mu C}$$

4/ La charge à la surface externe plus (+) la charge sur la surface interne de la cavité est égale(=) à la charge que porte la sphère. La charge que porte la surface externe de la sphère est donc :

$$Q_e + Q_i = 80\mu C \;\; , \;\; Q_e + 20 = 80 \Rightarrow \boxed{Q_e = 60\mu C}$$

Exercice 2.3 :

1/ On applique le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon un peu plus grand que le rayon du cylindre conducteur, telle que toute la charge que porte le cylindre soit à l'intérieur de la surface Gauss.

$$\boxed{E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S_G} = \frac{Q_{int}}{4\pi R_G^2.\varepsilon_0.}}$$

$$\boxed{E = 5,4.10^6 Vm^{-1}}$$

2/ La densité linéaire est égale à la somme des deux densités, celle du cylindre et celle de la tige :

$$\lambda = 9 + 5 \quad , \quad \boxed{\lambda = 14 \mu C m^{-1}}$$

3/ On applique le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon un peu plus grand que le rayon du cylindre conducteur, telle que toute la charge que porte le cylindre et la tige ensemble, soit à l'intérieur de la surface Gauss :

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\lambda l}{2\pi r l \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}} \quad , \quad \boxed{E = 8,4.10^6 Vm^{-1}}$$

4/ On applique le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon $R = 2cm$, telle que toute la charge que porte la tige soit à l'intérieur de la surface Gauss :

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\lambda_T l}{2\pi R l \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi R \varepsilon_0}} \quad , \quad \boxed{E = 4,5.10^6 Vm^{-1}}$$

Exercice 2.4 :

1/ On sait que pour charger un conducteur, il faut fournir un travail. Pour ajouter une charge élémentaire dq (en supposant qu'on la ramène de l'infini où $V_\infty = 0$) à un conducteur, il faut fournir un travail élémentaire : $dW_e = dq\left(V_\infty - V\right)$. L'énergie potentielle élémentaire est donc $dE_p = -dW_e \Rightarrow dE_p = dq.V$. Pour obtenir l'énergie totale il faut intégrer :

$$E_p = \int_0^q V dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$q = CV \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow (1)$$

Le potentiel à la surface de la sphère est :

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R} \\ q = \sigma.4\pi R^2 \end{array}\right| \Rightarrow V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \rightarrow (2)$$

En remplaçant le potentiel par sa valeur (2) dans l'équation (1), on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} C = 4\pi\varepsilon_0 R \\ V^2 = \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} R^2 \end{array}\right| \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 R \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} R^2 \quad , \quad \boxed{E_p = 4\pi R^3 p_e}$$

2/ Au cours de l'opération de décharge, l'énergie qui était sur la surface de la sphère se transforme en énergie calorifique par effet joule dans le fil joignant la sphère à la terre.

3/ L'énergie fournie par la source de tension à la sphère est $E_p = qV = CV^2$, c'est le double de l'énergie emmagasinée dans la sphère conductrice à la fin. L'autre moitié s'est transformée en énergie calorifique au cours du transfert des charges à travers le fil métallique.

Exercice 2.5 :

1/ Les deux sphères sont au même potentiel, $V_1 = V_2$:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \rightarrow (1)$$

D'après le principe de la conservation de la charge, on a : $Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow (2)$

Des équations (1) et (2) on peut en déduire la charge de chaque sphère :

$$\begin{cases} Q_1 R_2 = Q_2 R_1 \rightarrow Q_1 = Q_2 \dfrac{R_1}{R_2} \\ Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow Q_1 = Q - Q_2 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{Q_2 = \dfrac{Q}{\dfrac{R_1}{R_2}+1}} \rightarrow \boxed{Q_2 = \dfrac{3}{13}10^{-9}C} \\ \boxed{Q_1 = Q_2\dfrac{R_1}{R_2}} \rightarrow \boxed{Q_1 = \dfrac{10}{13}10^{-9}C} \end{array} \right.$$

2/ L'énergie de la sphère avant la connexion (La capacité C d'un conducteur sphérique étant $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$) :

$$W = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \boxed{W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}} \rightarrow \boxed{W = 4,5.10^{-9}J}$$

3/ L'énergie du système après la connexion des deux sphères entre elles :

$$\left. \begin{array}{l} W = W_1 + W_2 \\ W = \dfrac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2}\right]} \rightarrow \boxed{W = 4,46.10^{-9}C}$$

On remarque une perte d'énergie, bien qu'elle soit négligeable. Puisque l'effet du fil n'est pas pris en considération, on peut expliquer la perte d'énergie comme étant une transformation en radiation électromagnétique à l'instant de la connexion des deux sphères.

4/ De l'équation (1), on déduit :

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

5/ En appliquant le théorème de Gauss, on peut calculer le champ électrique à la surface de la sphère :

$$ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{1,surface} = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \\ E_{2,surface} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \\ \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\frac{E_{1,surface}}{E_{2,surface}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

Exercice 2.6 :

1/ La sphère S_1 acquiert la charge $+Q_1$ lorsqu'elle est portée au potentiel V_1. La cavité S_2 est influencée totalement par la charge de la sphère S_1, ce qui entraîne l'apparition de la charge $-Q_1$ à sa surface interne, et la charge $+Q_1$ sur sa surface externe, telle que sa charge totale reste nulle du fait qu'elle est isolée et en équilibre (figure-a). C'est pour cette raison que le champ à l'intérieur de la cavité $R_1 \prec r \prec R_2$ est égal, d'après le théorème de Gauss, à :

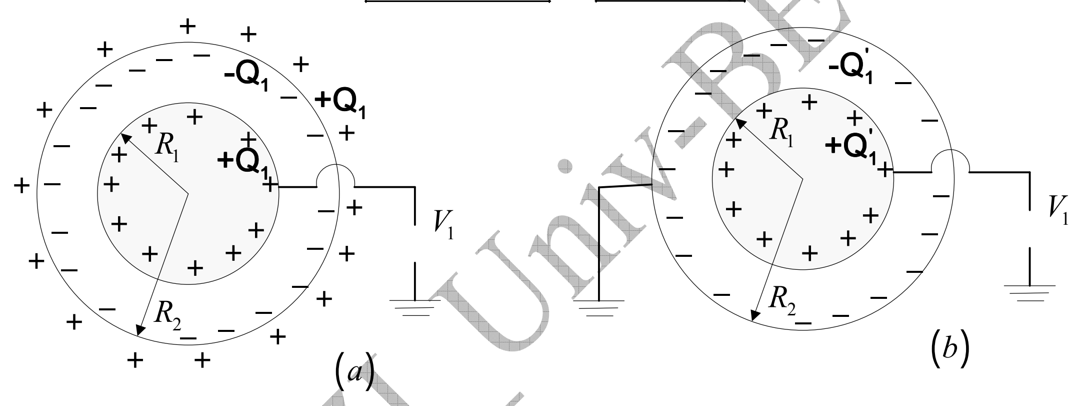
$$\left.\begin{array}{l} E(r).S = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0} \\ S = 4\pi r^2 \end{array}\right| \Rightarrow E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2/ Calculons la circulation du champ de R_1 à ∞, sachant que $V_\infty = 0$:

$$V_1 - V_\infty = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}\overrightarrow{dr} \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}}$$

Donc, la valeur de la charge que porte la sphère S_1 est :

$$\boxed{Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1} \ , \ \boxed{Q_1 = 1{,}1\mu C}$$



2/ La mise à la terre de la sphère creuse se traduit par la décharge de sa surface externe, pendant que sa surface interne porte la charge $-Q_1^{'}$, le potentiel de cette cavité est nul. Figure-b.

En suivant le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\overrightarrow{dr} \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1^{'}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Q_1^{'}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

On en déduit la charge de la surface interne de la cavité creuse, qui est égale mais de signe contraire à celle de la sphère S_1, en raison de l'influence totale :

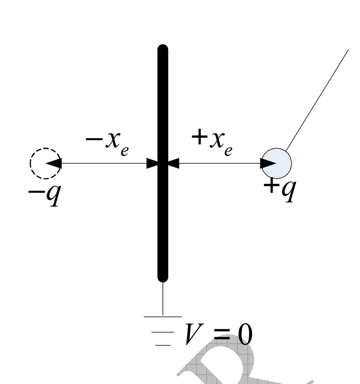
$$\left.\begin{array}{l} Q_1^{'} = 4\pi\varepsilon_0 V_1\left(\dfrac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right) \\ Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1 \end{array}\right| \Rightarrow Q_1^{'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}Q_1$$

$$R_2 = 2R_1 \Rightarrow \boxed{Q_1^{'} = 2Q_1} \ , \ \boxed{Q_1^{'} = 2{,}2\mu C}$$

Conclusion : La charge de la sphère S_1 varie aussitôt que la cavité S_2 est reliée à la terre.

Exercice 2.7 :

La répartition de la charge consiste en une charge $+q$ que l'on peut considérer comme ponctuelle, son niveau de potentiel étant nul $(V=0)$.



Avant de placer la charge $+q$ au voisinage du plateau, le plateau n'était pas chargé. Lorsqu'on approche la charge $+q$ de ce plateau, et par effet de l'électrisation par influence, le plateau se charge négativement, tel que son potentiel reste nul. Il résulte de ceci l'attraction de la charge par le plateau.

La charge $+q$ et le plateau créent dans l'espace une répartition de potentiel caractérisée par son niveau de potentiel nul (Surface équipotentielle) en $x=0$.

Si on remplace le plateau par une charge $-q$ ponctuelle située à la distance $-x_e$, on aurait la même répartition de potentiel (le plan médiateur à un potentiel nul $V=0$). On appelle cette charge $(-q)$ **l'image électrique** de la charge $+q$ par rapport au plan. L'attraction entre la charge $+q$ et le plateau de potentiel nul $(V=0)$ est la même attraction produite entre la charge $+q$ et la charge $-q$.

La force appliquée sur la sphère, d'après la loi de Coulomb, est donc :

$$\boxed{F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4x_e^2}}$$

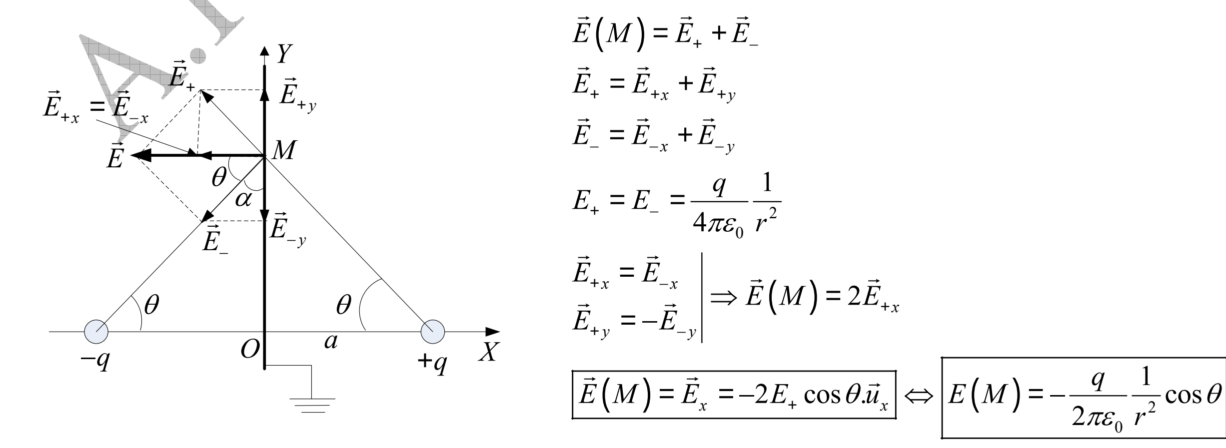
Exercice 2.8 :

1/ Quelque soit le point M appartenant au plan conducteur, la différence de potentiel créée par les deux charges est nulle :

$$\left.\begin{array}{l}\forall M \quad , \quad V(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right) \\ \qquad\qquad r_1=r_2=r\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V(M)=0}$$

Le champ a une seule composante $\vec{E}_x$ située sur l'axe des X, et par conséquent, le champ résultant des deux charges au point M est perpendiculaire au plan conducteur vertical comme il est démontré dans le raisonnement suivant :

On note par $\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$ les deux champs résultant respectivement des deux charges $+q$ et $-q$. D'après la figure ci-dessous on a :



$$\vec{E}(M)=\vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\vec{E}_+ = \vec{E}_{+x} + \vec{E}_{+y}$$

$$\vec{E}_- = \vec{E}_{-x} + \vec{E}_{-y}$$

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_{+x}=\vec{E}_{-x} \\ \vec{E}_{+y}=-\vec{E}_{-y}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{E}(M)=2\vec{E}_{+x}$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\vec{E}_x=-2E_+\cos\theta.\vec{u}_x} \Leftrightarrow \boxed{E(M)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta}$$

2/ Pour calculer la densité de charge, on utilise le théorème de Gauss :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = ES = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ Q_{\text{int}} = \sigma S\end{array}\right| \Rightarrow \sigma = E\varepsilon_0$$

$$\left.\begin{array}{l}E = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\cos\theta \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\sigma = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{qa}{r^3}}$$

3/ Pour vérifier la charge du plan, on calcule le flux que produit la charge ponctuelle $+q$ à travers la surface du plan conducteur :

On sait que le flux élémentaire est $d\Phi = EdS$:

$$d\Phi = 2E_+ \cos\theta.dS \Rightarrow d\Phi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}dS$$

On reconnaît l'angle solide élémentaire $d\Omega$: $d\Omega = \dfrac{\cos\theta}{r^2}dS \Rightarrow d\Phi = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}d\Omega$

De la charge $+q$ on voit le demi espace correspondant à l'angle solide $\Omega = 2\pi$, d'où :

$$\Phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

D'après le théorème de Gauss $\Phi = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

A la fin, on vérifie que la charge que porte le plan est : $\Phi = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = -\dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{Q_{\text{int}} = -q}$. Ce résultat prouve qu'il existe une influence totale entre la charge $+q$ et le plan conducteur à condition qu'il soit infini : $q = -q$.

Exercice 2.9 :

Pour calculer le flux, on utilise la formule vue en cours dans l'étude de la forme différentielle du théorème de Gauss :

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]dv = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

Pour calculer la charge interne, on fait appel au théorème de Gauss : $\Phi = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Quant au calcul de la densité de la charge ρ, on utilise le théorème de Gauss sous sa forme différentielle :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Premier cas : $\vec{E} = Cx\vec{u}_x$

Le champ électrique a une seule composante $\vec{E}_x$. Le flux est donc :

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}\right]dv = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dE_x}{dx}=C\\&dv=dxdydz\\&d\Phi_{\vec{E}}=Cdv\end{aligned}\right|\Rightarrow\Phi_{\vec{E}}=Cv\ ,\ \boxed{\Phi_{\vec{E}}=Ca^3}$$

La charge interne est :

$$\left.\begin{aligned}&\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}\\&q=\Phi\varepsilon_0\end{aligned}\right|\Rightarrow\boxed{q=\varepsilon_0 Ca^3}$$

La densité de charge est :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow\rho=\varepsilon_0\frac{dE_x}{dx}\Rightarrow\boxed{\rho=\varepsilon_0 C}$$

<u>Deuxième cas</u> : $\vec{E}=C\left(y\vec{u}_x+x\vec{u}_y\right)$

Le champ a deux composantes $\vec{E}_x$ et $\vec{E}_y$. Le flux est donc :

$$d\Phi_{\vec{E}}=\left[\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}\right]dv=0\Rightarrow\boxed{\Phi_{\vec{E}}=0}$$

La charge interne est : $q=\varepsilon_0\Phi=0\Rightarrow\boxed{q=0}$

La densité de charge est :

$$\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow\boxed{\rho=0}$$

<u>Exercice 2.10</u> :

Le conducteur S_1 porte sa charge propre $q_{11}=C_{11}V_1$, en plus de la charge $q_{12}=C_{12}V_2$ qui résulte de l'influence du conducteur S_2. Il en est de même pour le conducteur S_2 :

$$q_1=C_{11}V_1+C_{12}V_2\rightarrow(1)$$
$$q_2=C_{21}V_{12}+C_{22}V\rightarrow(2)$$

Puisque la distance qui les sépare est très grande par rapport à leurs rayons, le potentiel de chaque sphère est équivalent au potentiel d'une charge ponctuelle, il est égal donc à la somme de leurs potentiels inductifs, soit :

$$V_1\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d}\rightarrow(3)$$
$$V_2\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d}\rightarrow(4)$$

On met le conducteur S_1 au potentiel $(V_1\succ 0)$, et, on relie le conducteur S_2 à la terre $(V_2=0)$, on obtient par ordre :

$$q_1^{'}=C_{11}V_1\rightarrow(5)$$
$$q_2^{'}=C_{21}V_1\rightarrow(6)$$

$$0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^{'}}{d}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^{'}}{R_2}\rightarrow(7)$$

On en déduit de l'équation (7) que :

$$q_1^{'}=-\frac{d}{R_2}q_2^{'}\rightarrow(8)$$

$$q_2^{'}=-\frac{R_2}{d}q_1^{'}\rightarrow(9)$$

En remplaçant le résultat (8) dans (3), avec $(d\succ\succ R_1,R_2)$, on trouve :

$$V_1\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\left(-\frac{d}{R_2}q_2^{'}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}q_2^{'}\Rightarrow V_1\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2-d^2}{dR_1R_2}$$

$$V_1\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{R_1R_2}\rightarrow(10)$$

Par identification des deux équations (9) et (6), on trouve le coefficient d'influence :

$$\boxed{C_{21}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2}{d}}$$

En remplaçant le résultat (9) dans (3), avec $(d\succ\succ R_1,R_2)$, on trouve :

$$V_1\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}q_1^{'}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(-\frac{R_2}{d}q_1^{'}\right)\Rightarrow V_1\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2-d^2}{d^2R_1}q_1^{'}$$

$$V_1\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}q_1^{'}\rightarrow(11)$$

Par identification des deux équations (11) et (5), on trouve la capacité d'influence :

$$\boxed{C_{11}=4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

On porte, à présent le conducteur S_2 au potentiel $(V_2\succ 0)$, et on relie le conducteur S_1 à la terre $(V_1=0)$. En suivant le mêmes raisonnement que précédemment, on arrive à :

$$\boxed{C_{22}=4\pi\varepsilon_0 R_2}\quad,\quad\boxed{C_{12}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2}{d}=C_{21}}$$

Discussion :

a/ Si les deux conducteurs étaient infiniment éloignés l'un de l'autre, on aurait : $C_{12}=C_{21}=0$, ce qui prouve qu'il n'y a pas d'influence mutuelle, autrement dit, chaque conducteur est isolé, donc : $C_1=C_{11}$ et $C_2=C_{22}$.

b/ Si les conducteurs étaient semblables et distants de $d=R_1=R_2$, on aurait :

$$C_{11}=C_{22}=-C_{12}=-C_{21}=4\pi\varepsilon_0 d$$

La solution serait plus rapide, si on utilise les matrices :

On écrit les équations (1) et (2) sous la forme :

$$\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}$$

On peut aussi écrire les équations (3) et (4) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix} R_1^{-1} & \mathrm{d}^{-1} \\ \mathrm{d}^{-1} & R_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

On remarque que la première matrice, qui représente la matrice des coefficients et des capacités d'influence, est équivalente à l'inverse de la matrice centrale dans la deuxième matrice, et en tenant compte des caractéristiques des matrices, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = 4\pi\varepsilon_0 \begin{bmatrix} R_1^{-1} & \mathrm{d}^{-1} \\ \mathrm{d}^{-1} & R_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 \begin{bmatrix} R_2^{-1} & -\mathrm{d}^{-1} \\ -\mathrm{d}^{-1} & R_1^{-1} \end{bmatrix} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \boxed{C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R_1} \\ \boxed{C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 R_2} \\ \boxed{C_{12} = C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{d}} \end{cases}$$

Exercice 2.11 :

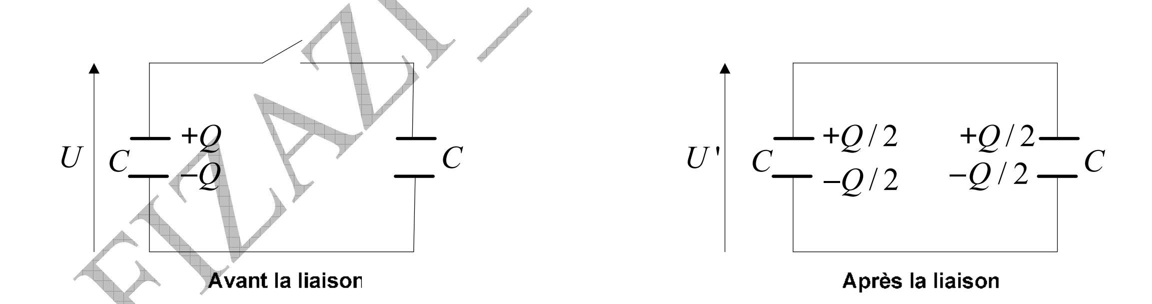
1/ Après la liaison des deux condensateurs, la charge Q, que portait le premier condensateur, se répartit sur les deux condensateurs, tel que chaque condensateur porte la charge $\frac{Q}{2}$.

La tension entre les deux bords du système est : $\frac{Q}{2} = CU' \Rightarrow \boxed{U' = \frac{Q}{2C}}$ $\boxed{U' = 10V}$

2/ Inventaire des énergies :

Avant la liaison : $\boxed{W = \frac{1}{2}CU^2}$ $\boxed{W = 20\mu J}$

Après la liaison : $\boxed{W' = \frac{1}{2}CU'^2 + \frac{1}{2}CU'^2}$ $\boxed{W' = 10\mu J}$



Commentaire : La différence entre les deux résultats est la perte de $10\mu J$!! Cette perte d'énergie n'a pas disparue !!!

Interprétation : Lors de la liaison des deux condensateurs, le courant de décharge produit un champ magnétique : les $10\mu J$ se sont transformés en radiation électromagnétique (C'est comme l'effet qui se produit au niveau des antennes d'émission des ondes radio).

Pour se convaincre, on place un poste radio à proximité du circuit : on entend un crépitement caractéristique qui résulte de la réception d'ondes électromagnétiques émises au moment de la fermeture du circuit. Pour la même raison, on peut entendre à la radio ces crépitements lors de l'éclatement d'un tonnerre.

Exercice 2.12 :

1/ L'énergie emmagasinée :

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}CU^2} \ , \ \boxed{W_E = 9,5.10^{-4}J}$$

2/ a) La relation entre les charges : La conservation de l'énergie nous impose :

$$\boxed{Q_A = Q_A^{'} + Q_E^{'}} \rightarrow (1)$$

b) Il y a une autre relation entre les charges :

$$U = Q_A^{'}.C_1 = Q_E^{'}.C_2 \Rightarrow \boxed{\frac{Q_A^{'}}{Q_E^{'}} = \frac{C_2}{C_1}} \rightarrow (2)$$

c) Des équations (1) et (2) , on obtient les valeurs de $Q_A^{'}$ et $Q_E^{'}$:

$$\boxed{Q_A^{'} = 4,7.10^{-5}C} \ , \ \boxed{Q_E^{'} = 3,2.10^{-5}C}$$

3/ L'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs :

On remarque que l'énergie n'est pas conservée. La différence est perdue sous forme d'énergie calorifique par effet joule dans le fil de jonction au moment de la liaison des deux condensateurs :

$$\boxed{\Delta W_E = W_E - W_E^{'}} \ , \ \boxed{\Delta W_E = 3,8.10^{-4}J}$$

Exercice 2.13 :

1/ En règle générale, on dit que deux conducteurs sont en influence totale si toutes les lignes de champ partant de la surface de l'un d'eux arrivent à la surface de l'autre. C'est ce qui arrive lorsque l'un des conducteurs entoure complètement l'autre. Dans notre cas, on ne peut rien dire quant aux lignes de champ qui quittent les surfaces externes des armatures. Cependant, si on reste assez éloigné des bords de chaque armature, toutes les lignes de champs issues de la surface interne de l'une des armatures, arrivent à l'autre armature. En ce sens, on peut dire qu'il y a influence totale.

Dans un conducteur en équilibre, la densité de charge est nulle, et par conséquent la charge est répartie sur la surface.

A cause de l'influence totale, la charge que porte la surface interne est égale et de signe opposé à la charge que porte la surface interne de l'armature d'en face. A cause de la symétrie du problème, les densités de charge sont uniformes, et le plan $y = d$ porte une densité constante égale à $-\sigma$.

2/ Le théorème de Coulomb énonce que le champ électrique au voisinage du conducteur est perpendiculaire à sa surface et égal à $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, où σ est la densité de charge surfacique du conducteur. On a pour chaque armature $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$.

3/ Le champ électrique est unidimensionnel, c'est-à-dire qu'il a une seule composante suivant l'axe des y et son intensité constante, donc il est uniforme. On sait que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Donc :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dy}\vec{u}_y \Rightarrow \int_{V(0)}^{V(d)} dV = -\int_0^d E dy$$

$$V(d) - V(0) = -Ed$$

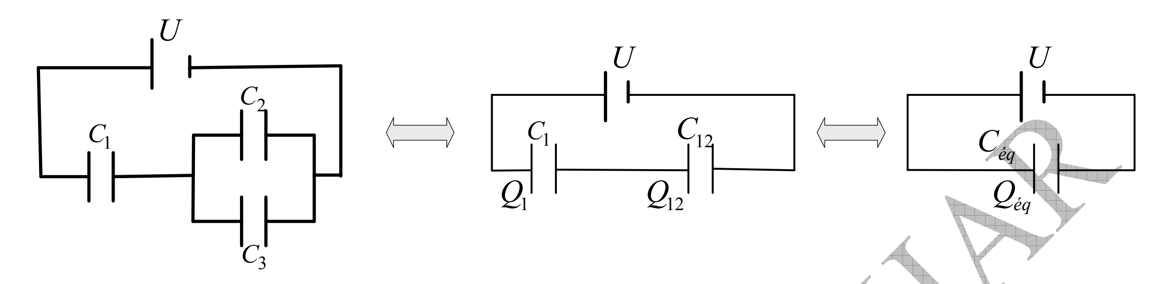
$$V(0) - V(d) = Ed \Rightarrow \boxed{V(0) - V(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d}$$

Il reste à déterminer la valeur de la capacité du condensateur :

$$\left.\begin{array}{l} Q = C\left[V(0) - V(d)\right] \Rightarrow C = \dfrac{Q}{V(0) - V(d)} \\ Q = \sigma S \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}}$$

Exercice 2.14 :

On peut simplifier le montage comme indiqué sur la figure suivante :



Les condensateurs C_2 et C_3 sont montés en parallèle, soit C_{12} leur capacité équivalente :

$$C_{12} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{12} = 15\mu F$$

Les condensateurs C_{12} et C_1 sont montés en série, soit $C_{éq}$ leur capacité équivalente :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_{éq} = \frac{C_{12} + C_1}{C_{12}C_1} \Rightarrow C_{éq} = 10\mu F$$

La charge totale du système est :

$$Q_{éq} = C_{éq}U \Rightarrow Q_{éq} = 30\mu C$$

La charge du condensateur C_1 est :

$$Q_1 = Q_{12} = Q_{éq} \Rightarrow \boxed{Q_1 = 30\mu C}$$

La tension entre les armatures du condensateur équivalent C_{12} est : $U_{12} = \dfrac{Q_{12}}{C_{12}} \Rightarrow U_{12} = 2V$

La charge du condensateur de capacité C_2 est : $Q_2 = C_2 U_{12} \Rightarrow \boxed{Q_2 = 20\mu C}$

La charge du condensateur de capacité C_3 est: $Q_3 = C_3 U_{12} \Rightarrow \boxed{Q_3 = 10\mu C}$

Exercice 2.15 :

1/ On applique le théorème de Gauss à une surface sphérique fermée de rayon compris entre R_e et R_i. A l'intérieur de cette surface, le champ est nul en raison de l'équilibre du conducteur. La charge que porte la paroi intérieure de la couronne est donc :

$$\left.\begin{array}{l} E = 0 \\ \Phi = ES = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0 \\ Q_{\text{int}} = Q + Q_i \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{Q_i = -Q}$$

2/Là aussi, on applique le théorème de Gauss. La surface de Gauss est une sphère de rayon $R_i \succ r \succ R$:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = E'S = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ Q_{\text{int}} = Q \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}}$$

3/ Dans ce cas, on sait que la permittivité absolue (ε) de l'isolant est égale au produit de la permittivité du vide (ε_0) par la permittivité relative (ε_r) de l'isolant $\varepsilon = \varepsilon_0 . \varepsilon_r$. Sachant que $\varepsilon \succ \varepsilon_0$, et puisque le champ est inversement proportionnel à la permittivité, le résultat est la diminution de l'intensité du champ.

$$\left. \begin{array}{l} E'' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{1}{r^2} \\ \varepsilon_0\varepsilon_r \succ \varepsilon_0 \end{array} \right| \Rightarrow E'' \prec E'$$

4/ Le potentiel entre les armature est :

$$V' = -E'dr \Rightarrow V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + K$$

En supposant, comme est toujours le cas, $V' = 0$ quand $r \to \infty$, on a $K = 0$. Donc :

$$\boxed{V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

5/ La capacité du condensateur : on calcule d'abord la différence de potentiel entre les armatures, puis on en déduit la capacité :

$$U = V - V_i \Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i}\right]$$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{RR_i}{R_i - R}}$$

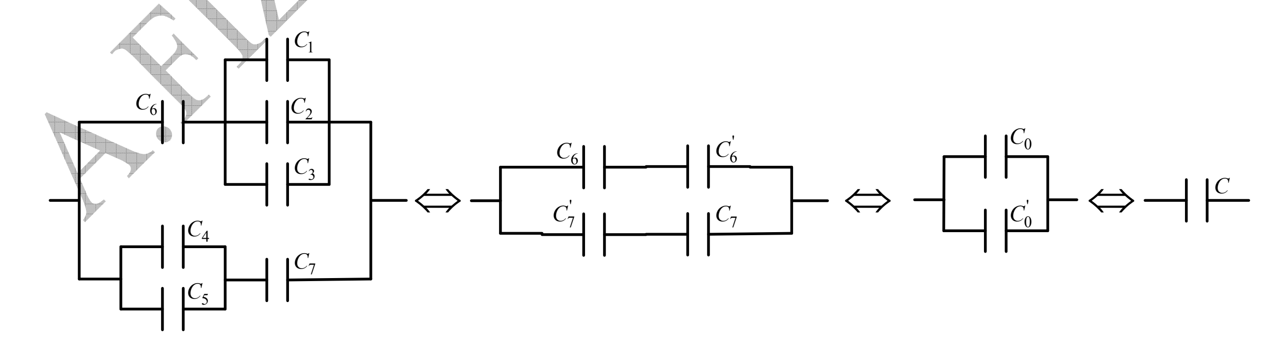
6/ Dans ce cas on a $RR_i = R_i(R_i + d) = R_i^2\left(1 + \dfrac{d}{R_i}\right) \approx R_i^2$ et $R_i - R \approx d$. On peut donc écrire :

$$\left. \begin{array}{l} S = 4\pi R_i^2 \\ d = R_i - R \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

Telle est la capacité du condensateur plan.

Exercice 2.16 :

On s'aide de la figure suivante :



1/ Calcul de la capacité du condensateur équivalent du montage :

$$C_6' = C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow C_6' = 6\mu F$$

$$C_7' = C_4 + C_5 \qquad \Rightarrow C_7' = 9\mu F$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_6^{'}} \Rightarrow C_0 = 4\mu F$$

$$\frac{1}{C_0^{'}} = \frac{1}{C_7} + \frac{1}{C_7^{'}} \Rightarrow C_0^{'} = 6\mu F$$

Finalement la capacité du condensateur est égale à :

$$C = C_0^{'} + C_0 \Rightarrow \boxed{C = 10\mu F}$$

2/ Calcul de la charge et de la différence de potentiel de chaque condensateur :

$$\left. \begin{array}{l} Q_6 = Q_6^{'} \Rightarrow 6U_6^{'} = 12U_6 \Rightarrow U_6^{'} = 2U_6 \\ U_6^{'} + U_6 = 120 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{U_6 = 40V} \ , \ \boxed{U_6^{'} = 80V}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_7 = Q_7^{'} \Rightarrow 9U_7^{'} = 18U_7 \Rightarrow U_7^{'} = 2U_7 \\ U_7^{'} + U_7 = 120 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{U_7 = 40V} \ , \ \boxed{U_7^{'} = 80V}$$

On en déduit de cela :

$$\boxed{U_1 = U_2 = U_3 = 80V} \ , \ \boxed{U_4 = U_5 = 40V}$$

A présent, il est facile de calculer la charge de chaque condensateur en appliquant la relation fondamentale des condensateur $Q = CU$:

$$Q_6 = C_6 U_6 \Rightarrow Q_6 = 480\mu C$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = C_1 U_1 \Rightarrow Q_1 = 80\mu C \\ Q_2 = C_2 U_2 \Rightarrow Q_2 = 160\mu C \\ Q_3 = C_3 U_3 \Rightarrow Q_3 = 240\mu C \end{array} \right| = Q_6 = Q_6^{'} \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} Q_4 = C_4 U_4 \Rightarrow Q_4 = 320\mu C \\ Q_5 = C_5 U_5 \Rightarrow Q_5 = 400\mu C \end{array} \right| = Q_7 = Q_7^{'}$$

$$Q_7 = C_7 U_7 \Rightarrow Q_7 = 720\mu C$$

L'énergie de tout le groupement est donc :

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \Rightarrow \boxed{W = 0{,}72J}$$

Exercice 2.17 :

Remarque : On note par l'indice 0 tout ce qui est en rapport avec la position $0°$, et par l'indice 1 tout ce qui se rapporte à la position $180°$.

1/ Quand le condensateur est reliée à la batterie, sa charge est :

$$\boxed{Q_1 = C_1 U} \ , \ Q_1 = 950.10^{-12}.400 \ , \ \boxed{Q_1 = 380nC}$$

2/ La différence de potentiel quand le cadran indique $0°$ est :

$$\boxed{W_0 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_0}} \ , \ \boxed{W_0 = 1{,}444.10^{-3} J}$$

3/ L'énergie du condensateur quand le condensateur indique $0°$ est donc :

$$\boxed{U_0 = \frac{Q_1}{C_0}} \ , \ U_0 = \frac{38.10^{-8}}{50.10^{-12}} \ , \ \boxed{U_0 = 7{,}6.10^3 V}$$

4/ Le travail nécessaire pour faire tourner le bouton est égal à la diminution de l'énergie entre les positions $0°$ et $180°$. L'énergie du condensateur quand le cadran indique $180°$ est:

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1}} \ , \ \boxed{W_1 = 0{,}076.10^{-3} J}$$

Donc le travail fourni est : $\boxed{w = W_1 - W_0}$, $\boxed{w = -1{,}368.10^{-3} J}$

Le signe moins (-) signifie que cette énergie a été dépensée.

Exercice 2.18 :

1/ **L'interrupteur K ouvert** : regardons la figure(a) correspondante :

D'après la règle des tensions : $U_{AB} = U_{AF} + U_{FB}$

D'où :

$$\left.\begin{array}{l} U_{AB} = (R_1 + R_2)I \\ R_1 = 2R_2 \end{array}\right| \Rightarrow U_{AB} = 3R_2 I = 3U_{FB}$$

Le potentiel en B est donc:

$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_B = 3(V_F - V_B) \\ V_B = 0 \ , \ V_A = 24V \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_F = 8V}$$

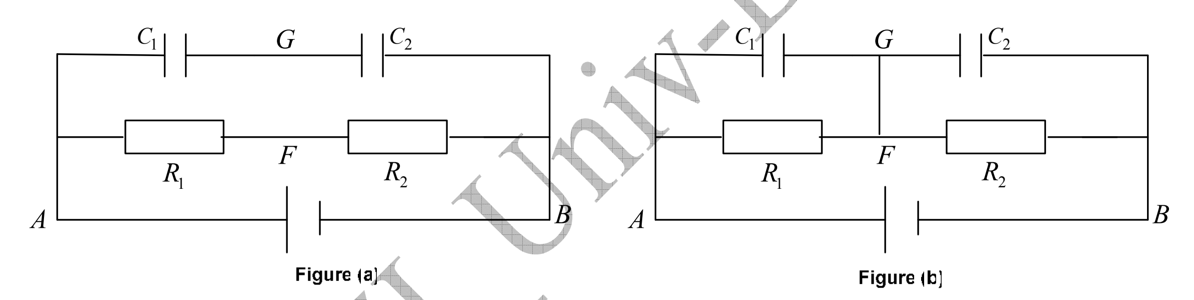
2/ De la même façon on trouve la valeur du potentiel $V_G : U_{AB} = U_{AG} + U_{GB}$

Les deux condensateurs portent la même charge Q puisqu'ils sont montés en série :

$$\left.\begin{array}{l} U_{AB} = QC_1 + QC_2 \\ C_2 = 2C_1 \end{array}\right| \Rightarrow U_{AB} = 3QC_1 = 3U_{AG}$$

Le potentiel en G est donc :

$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_B = 3(V_A - V_G) \\ V_B = 0 \ , \ V_A = 24V \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_G = \frac{2V_A}{3}} \quad \boxed{V_G = 16V}$$



3/ **L'interrupteur K fermé** : Regardons la figure(b) correspondante.

Le potentiel du point F est le même qu'à la question (1), soit $V_F = 8V$. Donc :

$$\boxed{V_F = V_G = 8V}$$

4/ Avant la fermeture de l'interrupteur, chaque condensateur portait la charge :

$$\left.\begin{array}{l} Q = Q_1 = Q_2 \\ C_1U_1 = C_2U_2 \\ U_1 = V_A - V_G = 16V \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{Q = 7,69.10^{-6}C}$$

Au moment de la fermeture, et temporairement, chaque condensateur portait sa propre charge :

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = C_1U_1 \rightarrow Q_1 = 7,69.10^{-6}C \\ Q_2 = C_2U_2 \rightarrow Q_2 = 1,92.10^{-6}C \end{array}\right| \Rightarrow Q_1 \neq Q_2$$

Cependant, cette situation ne dure pas. Lorsque l'état d'équilibre est atteint très rapidement, les charges des deux condensateurs deviennent égales. Pour que les deux charges des deux armatures communes au point G s'égalisent, il faut que des charges négatives, les seules qui peuvent se déplacer, quittent l'armature C_1. Ce déplacement ne s'arrête que lorsque les deux charges des deux armatures s'égalisent.

Si $Q_1^{'}$ est la valeur qui a transité par l'interrupteur, sa valeur est donc :

$$Q_2 = Q_1 + Q_1' \Rightarrow Q_1' = Q_2 - Q_1 \quad , \quad \boxed{Q_1' = -5,76.10^{-6} C}$$

Exercice 2.19 :

1/ Pour calculer la quantité d'énergie emmagasinée dans le condensateur, calculons d'abord la capacité du condensateur :

$$\boxed{C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}} \quad , \quad \boxed{C_1 = 35,8.10^{-12} F}$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}} \quad , \quad \boxed{W_E = 1,25.10^3 J}$$

2/ Si on introduit une plaque de mica, la capacité augmente, ce qui entraîne une diminution de l'énergie. La permittivité absolue du mica est $\varepsilon = \varepsilon_0 \kappa$. D'où :

$$\boxed{C_2 = \kappa\varepsilon_0 \frac{S}{d}} \quad , \quad \boxed{C_2 = 250,6.10^{-12} F}$$

$$\boxed{W_{E2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2}} \quad , \quad \boxed{W_{E2} = 1,8.10^2 J}$$

3/ Dans le cas de la diminution de la distance entre les armatures, la capacité augmente et l'énergie emmagasinée diminue :

$$\boxed{C_3 = \kappa\varepsilon_0 \frac{S}{d/2}} \quad , \quad \boxed{C_2 = 501,2.10^{-12} F}$$

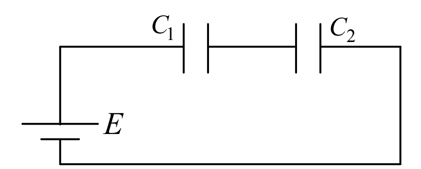
$$\boxed{W_{E3} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_3}} \quad , \quad \boxed{W_{E3} = 89,8 J}$$

Exercice 2.20 :

I. **L'interrupteur K_1 fermé** : Voir figure correspondante ci-dessous :

1/ les deux condensateurs étant montés en série, ils portent la même charge. La tension entre les armatures du condensateur équivalent est égale à la force électromotrice E du générateur :

$$\left.\begin{array}{l} C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ q = CV = CE \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{q = E\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad , \quad \boxed{q = 4\mu C}$$

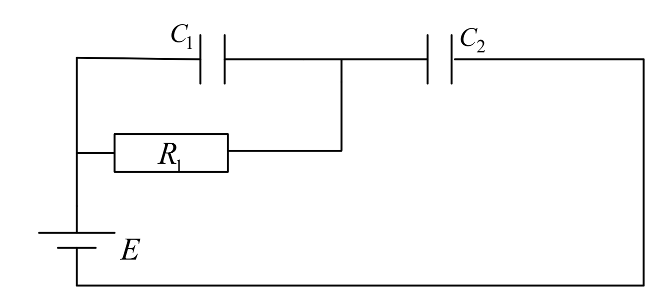


2/ La différence de potentiel entre les armatures de chaque condensateur :

$$U_1 = \frac{q}{C_1} \Rightarrow \boxed{U_1 = 4V}$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} \Rightarrow \boxed{U_2 = 2V}$$

II. On laisse l'interrupteur K_1 fermé, et on ferme les interrupteurs K_2 et K_3 . Voir figure suivante :



1/ Après le laps de temps nécessaire pour la charge du condensateur, le courant électrique s'annule, mais le générateur impose une tension permanente entre ses bords. En suivant les deux trajets différents pour calculer la tension entre les pôles du générateur, on arrive à :

$$\left.\begin{array}{l} E = U_1 + U_2 \\ E = U_2 \end{array}\right| \Rightarrow U_1 = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = 0}$$

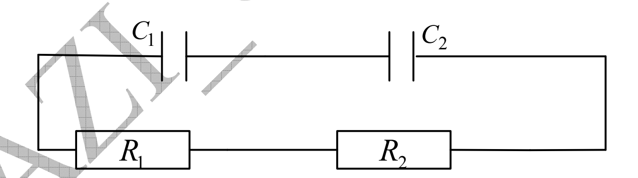
Donc, le condensateur C_1 se décharge dans la résistance R_1, tandis que le condensateur C_2 se charge sous la tension E du générateur, telle que :

$$q_2 = C_2 E \Rightarrow \boxed{q_2 = 12nC}$$

2/ La différence de potentiel entre les bords de chaque condensateur est :

$$\boxed{U_1 = 0} \; , \; \boxed{U_2 = E = 6V}$$

III. On ouvre les interrupteurs K_1 et K_3 , et on ferme les interrupteur K_2 et K_4. Voir figure suivante :

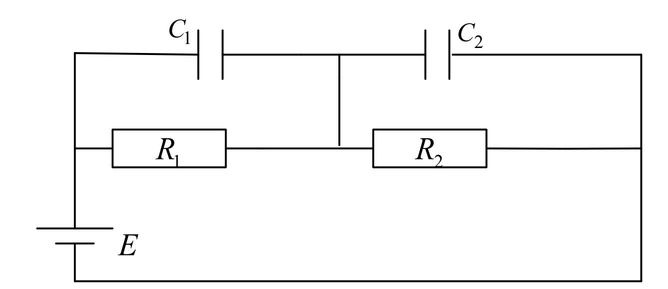


Les deux condensateurs se déchargent complètement dans les résistances :

$$\boxed{q_1 = q_2 = 0}$$

IV. On laisse K_2 et K_4 fermés, puis on ferme aussi les interrupteurs K_1 et K_3.

1/ La tension entre les bords de chaque condensateur est :



$$E=(R_1+R_2)I \Rightarrow \boxed{I=\frac{E}{R_1+R_2}}\ ,\ \boxed{I=0,03A}$$

$$R_1=R_2 \Rightarrow \boxed{U_1=U_2=R_1I}\quad \boxed{U_1=U_2=3V}$$

2/ La charge de chaque condensateur est :

$$\boxed{q_1=C_1U_1}\boxed{q_1=3\mu C}$$

$$\boxed{q_2=C_2U_2}\boxed{q_2=6\mu C}$$

Exercice 2.21 :

Si l'électromètre indique zéro, cela veut dire que les points F et G sont au même potentiel. Nous voyons sur la figure ci-contre que :

$$U_{AF}=U_{AG} \Rightarrow \frac{q_1}{C_1}=\frac{q_3}{C_3} \rightarrow (1)$$

$$U_{FB}=U_{GB} \Rightarrow \frac{q_2}{C_2}=\frac{q_4}{C_4} \rightarrow (2)$$

D'après le principe de la conservation de la charge, on a :

$$-q_1+q_2=0 \Rightarrow q_1=q_2$$

$$-q_3+q_4=0 \Rightarrow q_3=q_4$$

Dans l'équation (2), on remplace q_2 et q_4 respectivement par q_1 et q_3, on écrit donc :

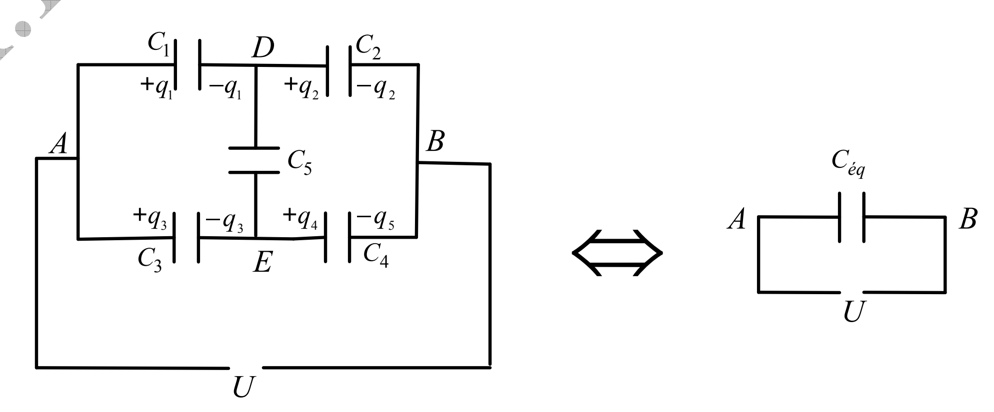
$$\frac{q_1}{C_2}=\frac{q_3}{C_4} \rightarrow (3)$$

On divise les équations (3) et (1) membre à membre, on obtient :

$$\frac{(3)}{(1)} \Rightarrow \boxed{\frac{C_1}{C_2}=\frac{C_3}{C_4}}$$

Exercice 2.22 :

1/ On remarque que E est un point commun aux condensateurs C_3 , C_4 et C_5 ; en même temps le point D est commun aux condensateurs C_1, C_2 et C_5. Le condensateur C_5 est seul entre les points E et D. Le montage qui montre la symétrie est représenté sur la figure suivante :



2/ On pose : $C_1=C_2=C_3=C_4=C$

D'après le principe de la conservation de la charge, et à l'aide de la figure précédente, on a :

$$q = q_1 + q_3 = q_2 + q_4 \rightarrow (1)$$
$$C_{éq}U = CU_1 + CU_3 = CU_2 + CU_4$$
$$C_{éq}U = C(U_1 + U_3) = C(U_2 + U_4) \rightarrow (2)$$

D'après la règle des tensions, on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l} U = U_1 + U_2 \\ U = U_3 + U_4 \end{array}\right| \Rightarrow 2U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \rightarrow (3)$$

De l'équation (1), on en déduit que :

$$C_{éq}U = CU_1 + CU_3 = CU_2 + CU_4 \Rightarrow U_1 + U_3 = U_2 + U_4$$

Reportons ce dernier résultat dans l'équation (3), qui devient :

$$2U = \underbrace{U_1 + U_3}_{U_2 + U_4} + U_2 + U_4$$
$$\boxed{U = U_2 + U_4} \rightarrow (4)$$

Des équations (2) et (4) on peut calculer la capacité du condensateur équivalent $C_{éq}$:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow C_{éq}U = C(U_2 + U_4) \\ (4) \rightarrow U = U_2 + U_4 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C_{éq} = C = 1\mu F}$$

La charge de chaque condensateur : on montre que les charges q_3, q_2, q_1 et q_4 sont égales :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} U_1 = U_3 \\ U_2 = U_4 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_3 \\ q_2 = q_4 \end{cases} \\ -q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 \\ -q_3 + q_4 = 0 \Rightarrow q_3 = q_4 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{q_1 = q_2 = q_3 = q_4}$$

Evaluons la charge q_2 par exemple :

$$U = U_1 + U_2 \Rightarrow \frac{q}{C_{éq}} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow q = q_1 + q_2 = 2q_2$$

$$q = C_{éq}U = 2Cq_2 \Rightarrow \boxed{q_2 = \frac{C_{éq}}{2}U}$$

$$\boxed{q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 5.10^{-7}C}$$

Quant à la charge q_5 , elle est nulle : $q_5 = C_5U_5 \Rightarrow \boxed{q_5 = 0}$

La différence de potentiel entre les bords de chaque condensateur est :

$$\left.\begin{array}{l} U = U_1 + U_2 \\ U_1 = U_2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 50V} \quad \boxed{U_5 = 0}$$

Exercice 2.23 :

L'énergie électrostatique libre initiale du système est : $(1) \leftarrow W_{e1} = \frac{1}{2}CU_0^2$

On obtient l'énergie finale, à la fin de régime transitoire, en fonction de C, C' et de la tension U commune entre les bords des deux condensateurs, en écrivant :

$$(2) \leftarrow W_{e2} = \frac{1}{2}(C + C')U^2$$

Pour connaître cette tension U, on introduit la conservation de la charge électrique au cours de la transformation de l'énergie. En effet, le système est isolé du milieu extérieur, et la charge électrique qui est une quantité de matière ne peut être que conservée. La charge initiale Q_0 s'est répartie à la fin en deux charges q et q', telle que :

$$Q_0 = CU_0 = q + q' = (C + C')U^2$$

$$U = \frac{C}{C + C'}U_0$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2}(C + C')\frac{C^2U_0^2}{(C + C')^2} \Rightarrow \boxed{W_{e2} = \frac{1}{2}\frac{C^2}{C + C'}U_0^2}$$

L'énergie emmagasinée dans l'ensemble des condensateurs est donc $(2)-(1)$:

$$\boxed{\Delta W_e = W_{e2} - W_{e1} = -\frac{1}{2}\frac{CC'}{C + C'}U_0^2}$$

Le signe moins (-) indique la diminution de l'énergie. L'énergie consommée a été transférée au milieu extérieur sous forme d'énergie calorifique, dans la résistance R. La puissance de cette transformation est d'autant plus grande que le temps de décharge est plus petit, et la résistante plus faible.

Pour s'en assurer de cela, on calcule l'énergie dissipée par effet joule : soit i l'intensité instantanée du courant électrique dans le circuit. La forme de ce courant est exponentielle. Sa valeur initiale est $\frac{U_0}{R}$, car à cet instant, le condensateur de capacité C' était sous une tension nulle. La constante de temps est $\tau = RC_{éq}$.

Donc : $i = \frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}$

L'énergie dissipée par effet joule est donnée par :

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R\frac{U_0^2}{R^2}\exp(-2t/\tau).dt$$

$$W_J = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}\tau \Rightarrow \boxed{W_J = \frac{1}{2}U_0^2\frac{CC'}{C + C'}}$$

La puissance moyenne au cours de la transformation du système, si on admet que l'opération s'est produite en l'intervalle de temps $t = 5\tau$, est :

$$P_{moy} = \frac{W_J}{t} = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}\frac{\tau}{5\tau} \Rightarrow \boxed{P_{moy} = \frac{1}{10}\frac{U_0^2}{R}}$$

Si On approche la valeur de la résistance de zéro, la transformation est brutale. La puissance calorifique transformée conduit à échauffement très important, même si la quantité de l'énergie fournie est indépendante de R.

<u>**Conclusion**</u> : Il faut éviter la jonction de ces deux sources de tension, c'est à dire les condensateurs chargés. Si la résistance est celle de l'interrupteur, qui est obligatoirement faible, l'instant de la fermeture conduit à sa détérioration.

Il est strictement interdit de réaliser un montage pareil.

Exercice 2.24 :

1/ Au cours de la charge du condensateur, l'intensité du courant est comptée positivement. Au cours de la décharge le courant change de sens, donc i est négative : $i=-\dfrac{dq_A}{dt}$

Remarque : $dq_A = q_A(t+dt)-q_A(t)\prec 0$ car la charge que porte l'armature A décroît au cours de la décharge, on trouve effectivement $i\prec 0$.

La relation entre i et u_C :

$$\left.\begin{array}{l} q_A = Cu_c \\ i=-\dfrac{dq_A}{dt}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{i=-C\dfrac{du_C}{dt}}$$

2/ L'équation différentielle de l'évolution de la tension u_C est :

$$\left.\begin{array}{l} u_C = u_R \\ u_R = Ri \\ i=-C\dfrac{du_C}{dt}\end{array}\right| \Rightarrow u_C=-RC\dfrac{du_C}{dt} \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{RC}u_C+\dfrac{du_C}{dt}=0}$$

3/ a) Désignation des deux constantes A et a :

Exprimons d'abord $\dfrac{du_C}{dt}=\dfrac{d\left(Ae^{-at}\right)}{dt} \Rightarrow \dfrac{du_C}{dt}=-aA\exp(-at)$

Remplaçons dans l'équation différentielle :

$$\frac{1}{RC}A\exp(-at)-aA\exp(-at)=0 \Rightarrow A\left(\frac{1}{RC}-a\right)\exp(-at)=0$$

Cette équation est vérifiée quelque soit le temps t :
pour $A=0$, ce qui est impossible car l'énoncé impose $A\succ 0$,
Ou pour $\dfrac{1}{RC}-a=0$, ce qui conduit à :

$$\frac{1}{RC}-a=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{RC}}$$

Au temps $t=0$, on a $u_C(0)=U_0=10V$, d'où :

$$A\exp(-a.0)=U_0 \Rightarrow \boxed{A=U_0}\ ,\ \boxed{A=10V}$$

b) La constante de temps est : $\boxed{\tau=RC}$

c) La valeur de la capacité est : $\boxed{C=\dfrac{\tau}{R}}$, $\boxed{C=2.10^{-3}F}$

d) La dimension de la constante de temps est homogène au temps :

$$\left.\begin{array}{l} \tau=RC \Rightarrow [\tau]=[R][C] \\ R=\dfrac{u_R}{i} \Rightarrow [R]=\dfrac{[U]}{[I]} \\ C=i\dfrac{dt}{du_C} \Rightarrow [C]=[I]\dfrac{[T]}{[U]}\end{array}\right| \Rightarrow [\tau]=\frac{[U]}{[I]}[I]\frac{[T]}{[U]} \Rightarrow \boxed{[\tau]=[T]}$$

4/ a) Expression de l'intensité instantanée :

$$\left.\begin{array}{l} i = C.\dfrac{du_C}{dt} \\ u_C = U_0 e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{i = -\frac{U_0}{C}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

b) Intensité du courant au temps $t = 0 : \mathrm{i}(0) = -\frac{\mathrm{U_0}}{\mathrm{R}}$, $\boxed{\mathrm{I_0} = -0,3\mathrm{A}}$

c) Intensité du courant au temps $t = 0,5s : \mathrm{i}(\mathrm{t}) = -\frac{\mathrm{U_0}}{\mathrm{R}}\exp\left(-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{RC}}\right)$, $\boxed{\mathrm{i}(0,5) = -0,2\mathrm{A}}$

d) La tension au même moment est : $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = \mathrm{U_0}\exp\left(-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{RC}}\right)$, $\boxed{\mathrm{u}(0,5) = 8.10^{-3}\mathrm{V}}$

e) La durée écoulée dépasse plus de cinq fois la valeur de la constante de temps τ, on trouve une valeur de u_C proche de zéro. Donc, on peut considérer que le condensateur s'est déchargé.

5/ L'expression de l'énergie emmagasinée dans le condensateur C au temps $t = 0$ est $W_E = \frac{1}{2}CU_0^2$. Pour le condensateur $(C' \succ C)$ C' on a $W_E^{'} = \frac{1}{2}C'U_0^2$. Puisque U_0 est constante, on a $W_E^{'} \succ W$.

<u>Exercice 2.25</u> :

1/ Dans un conducteur en équilibre, le champ $\vec{E}$ est nul, et par conséquent $div\vec{E} = 0$. D'après la forme différentielle du théorème de Gauss, $div\vec{E} = \rho / \varepsilon_0$. Donc $\boxed{\rho = 0}$.

2/ En raison de la symétrie sphérique du système des deux conducteurs en état d'équilibre électrostatique, le champ qui est un vecteur radial, est contenu dans tous les plans contenant l'axe $\overrightarrow{OM}$; donc le champ radial $\vec{E}(M)$ et porté par $\vec{u}$.

En plus de ce qui vient d'être dit, il n'y a pas de variation du champ par rotation autour de O. Cela veut dire que les valeurs du champ ne dépendent pas des variables θ et φ.

D'où, on peut écrire $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}$ et $V(M) = V(r)$.

3/ La répartition des charges sur les surfaces des conducteurs.

En raison de la symétrie sphérique de l'ensemble des conducteurs, les charges se répartissent uniformément sur leurs surfaces. La charge $2Q$ du conducteur externe (C') se répartit sur ses surfaces interne et externe.

Puisque les conducteurs (C) et (C') sont en influence totale, il existe obligatoirement sur la surface interne du conducteur (C') la charge $+Q$.

La charge restante $+Q$ apparaît sur la surface externe du conducteur (C').

On peut démontrer ceci, en appliquant le théorème de Gauss : Le champ est nul sur une sphère de rayon , tel que $2R \prec r \prec 3R$. Le flux du champ externe est donc nul, et par conséquent la charge interne de cette surface doit être nulle.

4/ **<u>Graphe de</u>** $E(r)$: On applique le théorème de Gauss à la sphère de rayon tel que $R \prec r \prec 2R$. La charge interne est $-Q$. On obtient : $4\pi r^2 E(r) = \frac{-Q}{\varepsilon_0}$.

On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon tel que $r \succ 3R$. La charge interne est $+Q$. On obtient : $4\pi r^2 E(r) = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$.

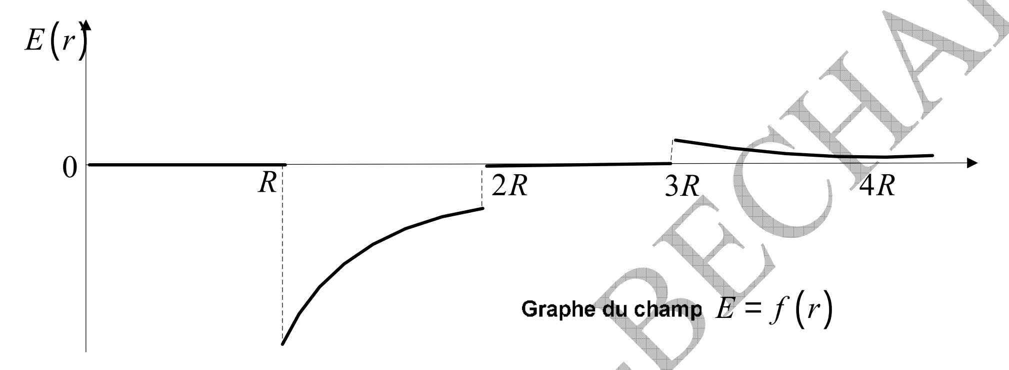
On a donc :

Pour $R \prec r \prec 2R$: $4\pi r^2 E(r) = \frac{-Q}{\varepsilon_0}$

Pour $r \succ 3R$: $4\pi r^2 E(r) = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$

Le champ est nul à l'extérieur de cet espace étudié, et discontinu à la traversée de tout plan chargé.

5/ : $div\vec{E}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{d^2\left(r^2E(r)\right)}{dr} = 0$, en effet, dans ce problème, il n'y a aucune densité volumique de charge en aucune position. La charge est répartit sur les surfaces des conducteurs.



Graphe du champ $E = f(r)$

6/ **Graphe $V(r)$ du potentiel** :

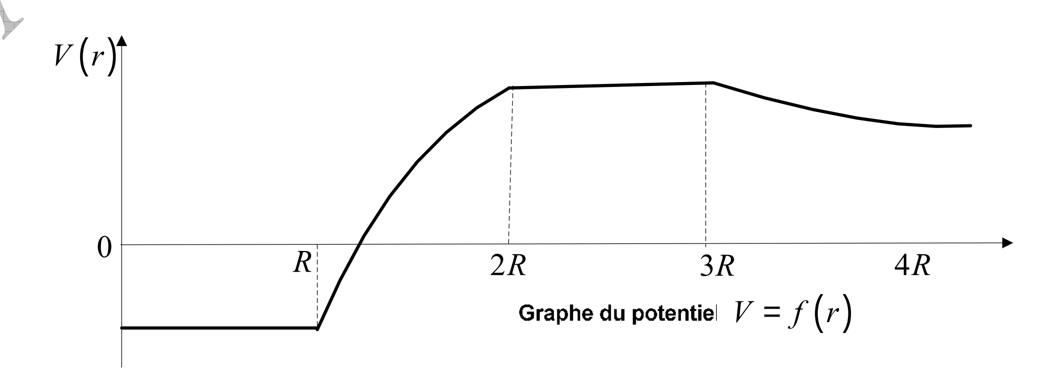
Le potentiel est continu. On l'obtient en partant de l'infini où sa valeur est nulle. Par intégration de $V(r) = -\int E(r)dr$ dans les différents cas, on obtient :

Pour $r \succ 3R$: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

Pour $3R \succ r \succ 2R$, le potentiel est constant : $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{3R}$

Pour $2R \succ r \succ R$, on a : $V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R} + K$

La constante d'intégration K est telle que $V(2R) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R} + K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{3R}$, on trouve à la fin $V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6R}$:



Graphe du potentiel $V = f(r)$

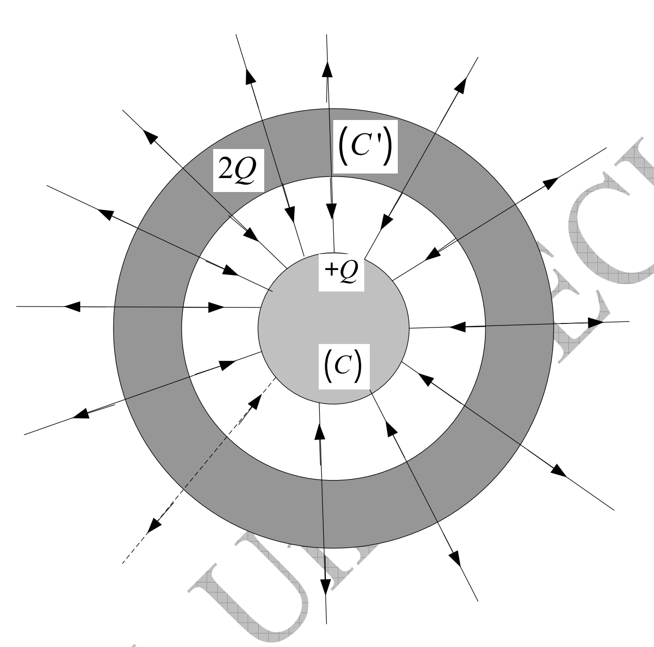
7/ Le potentiel du conducteur (C') est : $V_{C'} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{3R}$

Le potentiel du conducteur (C) est : $V_C = \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{6R}$

La différence de potentiel est donc : $V_{C'} - V_C = U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2R}$

En utilisant la relation fondamentale des condensateurs $Q = CU$, on obtient la capacité de ce condensateur sphérique : $\boxed{C = 8\pi\varepsilon_0 R}$

8/ La forme de quelques lignes de champ orientées (voir figure ci-dessous)



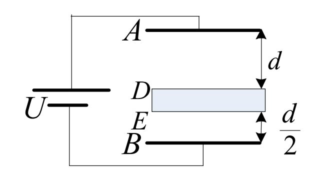
9/ Energie du condensateur : $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} \Rightarrow \boxed{W = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}}$

Exercice 2.26 :

1/ Capacité du condensateur plan : $\boxed{C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{2d} = \varepsilon_0 \dfrac{x.L}{2d} \Rightarrow C = 2.65\times 10^{-12}\,F}$

2/ Charge du condensateur :

$$\left.\begin{array}{l} Q = CV \\ C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{2d} = \varepsilon_0 \dfrac{x.L}{2d} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{Q = \varepsilon_0 \dfrac{x.L}{2d} V};\ \boxed{Q = 1.1\times 10^{-9} C}$$



Calcul des charges des faces :

L'électrisation se produit par influence : $\boxed{Q_E = -Q_B\ ;\ Q_A = -Q_D}$, et puisque la plaque interne est initialement électriquement neutre, on a :

$$\boxed{Q_D = -Q_E} \Rightarrow \boxed{Q_D = -Q_E = +Q_B = -Q_A = Q'}$$

Le résultat, est qu'on a deux condensateurs groupés en série.

La capacité du condensateur équivalent est donc :

$$C_{éq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \;; \quad \left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_0 S}{d} \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{C_{éq} = \frac{2\varepsilon_0 S}{3d}}$$

Les charges que portent les quatre faces sont :

$$\boxed{Q' = C_{éq} V = 2\varepsilon_0 \frac{L.x}{3d}}$$

$$\boxed{Q' = Q_D = -Q_E = +Q_B = -Q_A = 1.4 \times 10^{-9}\, C}$$